

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавр

на тему «**Дослідження автоколивальних
СИСТЕМ**»

Виконав: студент групи МП41 IV курсу,
спеціальності 113
Прикладна математика
Мішнєв Д.Є.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук
доцент кафедри
прикладної математики
Пославський С.О.

Рецензент: доктор технічних наук
професор кафедри
прикладної математики
Ромашов Ю.В.

Харків — 2023 рік

Анотації

Мішнев Д.Є. Дослідження автоколивальних систем.

31 сторінок, 15 рисунків, 3 лістингів. У роботі досліджується виникнення автоколивань під час електролізу у двошаровій системі рідин з близькими густинами. Система моделюється системою нелінійних диференціальних рівнянь. Досліджено положення рівноваги та їх стійкість. Досліджено умови втрати стійкості положення рівноваги, розглянуто сценарій розвитку автоколивань.

Mishiev D.Y. Research of self-oscillating systems.

31 pages, 15 figures, 3 listings. The paper investigates the occurrence of self-oscillations during electrolysis in a two-layer system of liquids with close densities. The system is modeled by a system of nonlinear differential equations. Equilibrium positions and their stability were investigated. The conditions for the loss of stability of the equilibrium position were studied, and the scenario of the development of self-oscillations was considered.

Зміст

Анотації	2
Вступ	4
1. Постановка задачі	7
2. Лінійна система	10
3. Модель з квадратичною нелінійністю	15
4. Модель з кубічною нелінійністю	20
Висновки	26
Список використаних джерел	31

Вступ

В багатьох фізичних, природних процесах виникають автоколивання. Автоколивання відрізняються низкою характерних властивостей, що виділяють їх із загального широкого класу коливальних явищ, і становлять предмет одного з важливих розділів теорії нелінійних коливань. На відміну від вимушених чи параметричних коливань автоколивання виникають у системах за відсутності зовнішнього періодичного впливу. Для виникнення автоколивань у системі необхідна наявність джерела енергії та механізму, завдяки якому енергія цього джерела перетворюється на коливальну енергію.

Автоколивання, як феномен, були вперше виявлені наприкінці ХІХ століття французьким фізиком Гюставом Робертом. Він провів серію експериментів із електричними контурами, що складаються з індуктивності, ємності, резистора та джерело струму. Він виявив, що за певних значень параметрів системи виникають автоколивання, які продовжуються навіть після припинення зовнішнього збудження. Робер відкрив, що система має властивість самостійно генерувати та підтримувати коливання.

На початку ХХ століття інтерес до автоколивань поширився на інші галузі науки і техніки. Осцилятори, що працюють на принципі автоколивань, стали невід'ємною частиною радіозв'язку та телекомунікацій. Дослідження автоколивань продовжилися та розширилися у різні наукові дисципліни. У хімії автоколивання було виявлено у хімічних реакціях, де деякі

системи можуть мимоволі коливатися між різними станами, найкращим прикладом є брюсселятор [1].

У наступних розділах буде розглянуто один з випадків виникнення автоколивань, а саме виникнення автоколивань під час електролізу алюмінію.

Електроліз - це процес, оснований на використанні електричного струму для розкладання хімічних сполук на елементи, що їх складають. Електроліз заснований на використанні електродів та електроліту. Електроліт містить іони, які переміщуються до анода або катода в залежності від своєї зарядності. На початку процесу на аноді відбувається окислення, тобто іони анода віддають електрони, перетворюючись на нейтральні атоми чи молекули. При цьому утворюється електронний струм, який рухається від анода до катода через зовнішній ланцюг. На катоді відбувається протилежний процес - іони катода приймають електрони, утворюючи нейтральні атоми чи молекули. В результаті електролізу відбувається розкладання електроліту на його елементи.

Однією з найпоширеніших галузей, яка використовує електроліз, є сучасне промислове виробництво алюмінію. У електролізній ванні знизу розташований розплавлений алюміній, зверху - шар електроліту. В електроліт частково занурений анод. Через зазначену двошарову систему рідин пропускається електричний струм. У процесі на катоді осаджується алюміній, на аноді йдуть реакції окиснення з утворенням газів [5,6]. Як показала практика, під час цього процесу з'являються деякі небажані ефекти, одним з яких є автоколивання. Так, при деяких умовах на поверхні розділу "метал-електроліт" з'являються хвилі, що призводить до зниження основних техніко-економічних показників роботи електролізерів.

У роботі розглянуто математичну модель хвилі, що обертається, на поверхні розділу. Основним припущенням є те, що головну роль відіграє взаємодія двох мод коливань - поздовжньої та поперечної. Така взаємодія обумовлена електромагнітними силами, що виникають при збудженнях гідродинамічних коливань (МГД взаємодія). Досліджується система двох диференціальних рівнянь другого порядку відносно амплітудних множників двох головних мод коливань. Визначаються умови, при яких виникають періодичні автоколивальні рухи.

Розділ 1. Постановка задачі

Нехай ми маємо ємність у формі прямокутного паралелепіпеда з майже квадратним горизонтальним перетином, яка заповнена двома рідинами, що не змішуються. Зверху в ній частково занурений анод, а знизу - катод. Дві рідини не змішуються і мають майже однакову щільність. (Рис. 1.1)

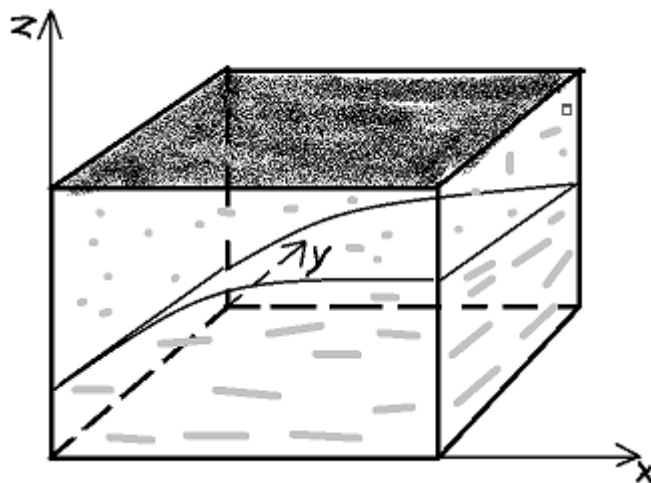


Рис. 1.1: Ємність з рідинами, що не змішуються

Уявимо, що електричний струм відсутній. Тоді рівняння коливання поверхні розділу вздовж осі X матимемо у вигляді

$$\ddot{A} + \omega_x^2 A = 0 \quad (1.1)$$

де A - функція часу (амплітудний множник), яка вказує на відхилення від стану спокою,

ω_x - власна частота.

Так само ми можемо розглянути аналогічні коливання поверхні розділу вздовж осі Y. Рівняння коливань у цьому випадку матиме схожий вигляд

$$\ddot{B} + \omega_y^2 B = 0 \quad (1.2)$$

де B - функція часу, яка вказує на відхилення від стану спокою,

ω_y - відповідна власна частота.

Треба зауважити, що так як наша ємність майже квадратна (по осям X та Y), то ω_y та ω_x відрізняються несуттєво. Об'єднавши рівняння (1.1) та (1.2), які описують коливання у свої площинах, ми матимемо таку систему рівнянь.

$$\begin{cases} \ddot{A} + \omega_x^2 A = 0 \\ \ddot{B} + \omega_y^2 B = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Дана система не враховує сил опору (в'язких сил), тому в такому випадку коливання будуть сталими та не зупиняться.

Додамо до кожного рівняння системи (1.3) сили в'язкого опору $\mu_x \dot{A}$ та $\mu_y \dot{B}$. Ці сили враховують тертя речовин між собою та стінками ємності. μ_x та μ_y у цьому випадку це коефіцієнти затухання, які мають доволі складний вигляд, їх докладний опис та знаходження приведені в статтях [2,3]. з зарахуванням нових факторів система (1.3) матиме вигляд

$$\begin{cases} \ddot{A} + \mu_x \dot{A} + \omega_x^2 A = 0 \\ \ddot{B} + \mu_y \dot{B} + \omega_y^2 B = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Для врахування взаємодії коливань по взаємно перпендикулярних напрямкам потрібно додати ще один доданок до кожного з рівнянь $k_x B$ до першого рівняння та $-k_y A$ до другого. Ці доданки відповідають за електромагнітну взаємодію між двома модами коливань.

Тоді система (1.4) матиме вигляд

$$\begin{cases} \ddot{A} + \mu_x \dot{A} + \omega_x^2 A + k_x B = 0 \\ \ddot{B} + \mu_y \dot{B} + \omega_y^2 B - k_y A = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Ця лінійна система диференціальних рівнянь описує коливання поверхні розділу двох речовин, що не змішуються, при дуже малій амплітуді.

Коли амплітуда починає зростати, з'являються нелінійні доданки, які виникають через гідродинамічні та електродинамічні фактори. Так, наприклад, у місцях, де нижня речовина через коливання підіймається вище до аноду, струм сильнішає, через що він перестає бути пропорціональним амплітуді, тому починають з'являтися доданки більш високого порядку. (Рис 1.2)

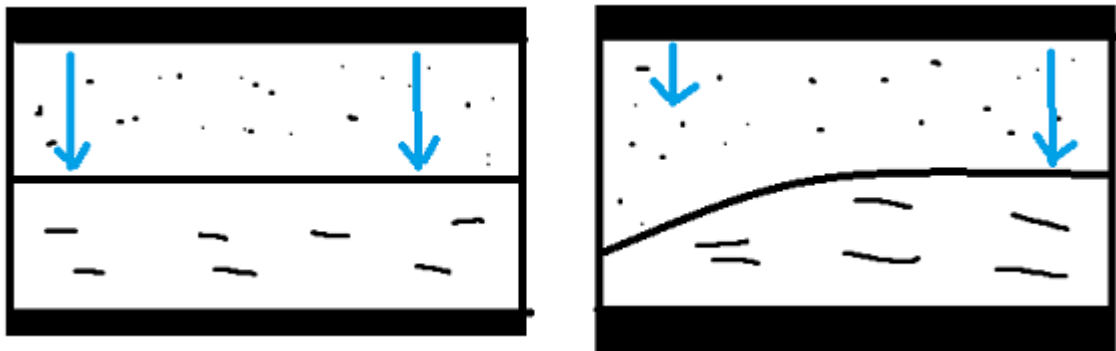


Рис. 1.2: Зміна сили струму

Тоді, додаючи нелінійні доданки до системи (1.5), у випадку квадратичної нелінійності, ми матимемо

$$\begin{cases} \ddot{A} + \mu_x \dot{A} + \omega_x^2 A + k_x B + c_x A^2 = 0 \\ \ddot{B} + \mu_y \dot{B} + \omega_y^2 B - k_y A + c_y B^2 = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

або у випадку кубічної нелінійності

$$\begin{cases} \ddot{A} + \mu_x \dot{A} + \omega_x^2 A + k_x B + c_x A^3 = 0 \\ \ddot{B} + \mu_y \dot{B} + \omega_y^2 B - k_y A + c_y B^3 = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Розділ 2. Лінійна система

Розглянемо спочатку лінійний випадок

$$\begin{cases} \ddot{A} + \mu_x \dot{A} + \omega_x^2 A + k_x B = 0 \\ \ddot{B} + \mu_y \dot{B} + \omega_y^2 B - k_y A = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Положення рівноваги визначається з умов $\dot{A} = \ddot{A} = \dot{B} = \ddot{B} = 0$.

Підставляючи ці умови у систему рівнянь, отримуємо:

$$\begin{cases} \omega_x^2 A + k_x B = 0 \\ \omega_y^2 B - k_y A = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Тоді положення рівноваги буде $A = 0; B = 0$, де $\omega_x, \omega_y, \mu_x, \mu_y, k_x, k_y$ додатні.

Відшукуючи часткові розв'язки системи (2.1) у вигляді $A = C_1 e^{\lambda t}, B = C_2 e^{\lambda t}$, отримуємо характеристичне рівняння:

$$\det(\lambda^2 I + \lambda M + K) = 0, \quad (2.3)$$

де

$$M = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} \omega_x^2 & k_x \\ -k_y & \omega_y^2 \end{pmatrix}$$

Тоді (2.3) приймає вигляд

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda\mu_x + \omega_x^2 & k_x \\ -k_y & \lambda^2 + \lambda\mu_y + \omega_y^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$\lambda^4 + (\mu_y + \mu_x)\lambda^3 + (\omega_y^2 + \mu_y\mu_x + \omega_x^2)\lambda^2 + (\omega_y^2\mu_x + \mu_y\omega_x^2)\lambda + (\omega_y^2\omega_x^2 + k_x k_y) = 0 \quad (2.5)$$

Стійкому положенню рівноваги відповідають власні значення з від'ємними дійсними частинами, а нестійкому - з додатними дійсними частинами. У випадку нестійкої рівноваги на поверхні розділу алюміній-електроліт виникають хвилі. Такі рухи мають характер автоколивань.

Побудуємо фазові портрети, щоб краще зрозуміти поведінку системи. Для цього візьмемо такі параметри: $\mu_x = 1.1$; $\mu_y = 1.2$; $\omega_x = 4$; $\omega_y = 4.1$; $k_x = 4$; $k_y = 4.1$. Підставимо ці значення до характеристичного рівняння та розв'яжемо його чисельно, тоді ми отримуємо такі власні корені:

$$\lambda_1 = -1.075 - 4.042i$$

$$\lambda_2 = -1.075 + 4.042i$$

$$\lambda_3 = -0.075 - 4.038i$$

$$\lambda_4 = -0.075 + 4.038i$$

Можемо бачити, що за таких початкових умов усі корені мають від'ємні дійсні частини, отже положення рівноваги є стійким.

Побудуємо, використовуючи чисельний метод, фазовий портрет. Через те, що система складається з двох диференціальних рівнянь другого порядку, фазовий портрет буде чотирьохвимірним, тому, нажаль, потрібно будувати проєкції. Так ми можемо бачити, що положення рівноваги дійсно є експоненційно стійким фокусом (Рис.2.1).

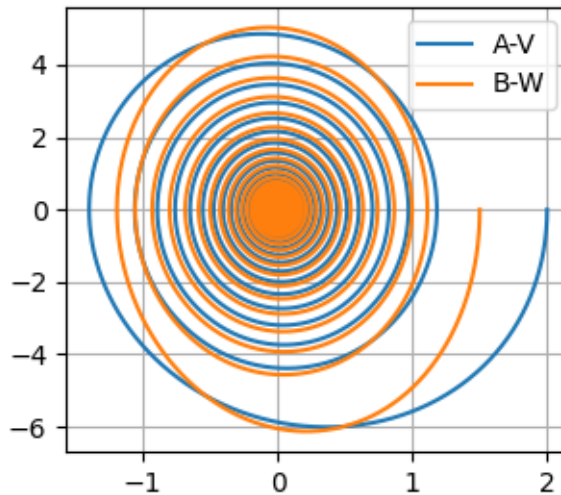


Рис. 2.1: Стійкий фокус. $A_0 = 2, B_0 = 1.5, k_x = 4$

Таким чином ми можемо чисельно дослідити, за яких умов положення рівноваги змінюватиме свою стійкість. Наприклад, зафіксувавши усі параметри окрім k_x , а k_x поступово збільшуватимемо, тоді на значенні $k_x = 5.316$ знаки дійсних частин характеристичних коренів зміняться та ми матимемо такі власні значення:

$$\lambda_1 = -1.15 - 4.052i$$

$$\lambda_2 = -1.15 + 4.052i$$

$$\lambda_3 = 1.66 \cdot 10^{-8} - 4.048i$$

$$\lambda_4 = 1.66 \cdot 10^{-8} + 4.048i$$

Отже, саме при переході через $k_x = 5.316$ наша система ставатиме нестійкою. При подальшому збільшенні k_x положення рівноваги залишатиметься нестійким, лише швидкість зростання амплітуди коливань збільшуватиметься (Рис. 2.2). Також положення рівноваги може змінити свою стійкість, якщо ми будемо змінювати інші параметри системи.

Тепер зафіксуємо усі параметри окрім μ_x . Цей параметр напряму впливає на затухання коливань, тому збільшення цього параметру не змінить

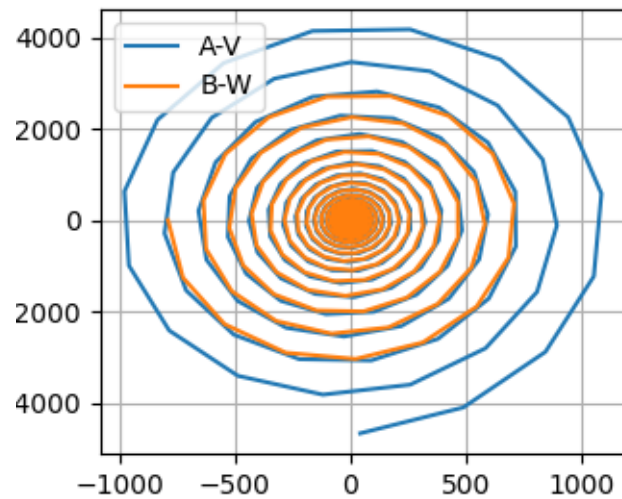


Рис. 2.2: Нестійкий фокус. $k_x = 8.7$, $A_0 = 2$, $B_0 = 1.5$

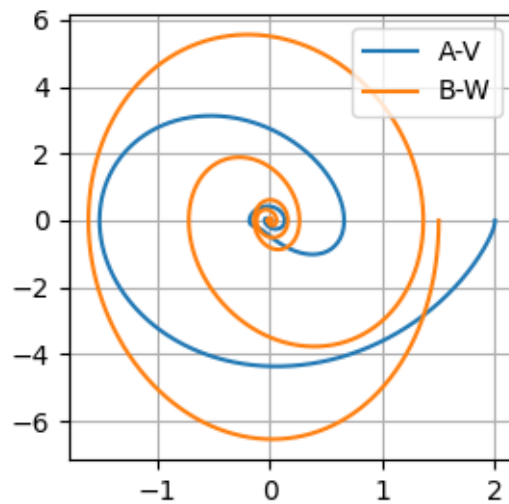


Рис. 2.3: Стійкий фокус. $\omega_x = 2$, $A_0 = 2$, $B_0 = 1.5$

стійкість стаціонарної точки, а лише збільшить швидкість затухання коливань (Рис.2.4). Якщо почнемо зменшувати μ_x то на значенні 0.76 положення рівноваги стане нестійким, при подальшому зменшені μ_x положення рівноваги залишатиметься нестійким та амплітуда коливань зростатиме нескінченно (Рис. 2.5). Проте у лінійному випадку амплітуда коливань при нестійкому положенні рівноваги завжди зростатиме нескінченно. Обмеження амплітуд пов'язане з нелінійним характером цих коливань. Для того

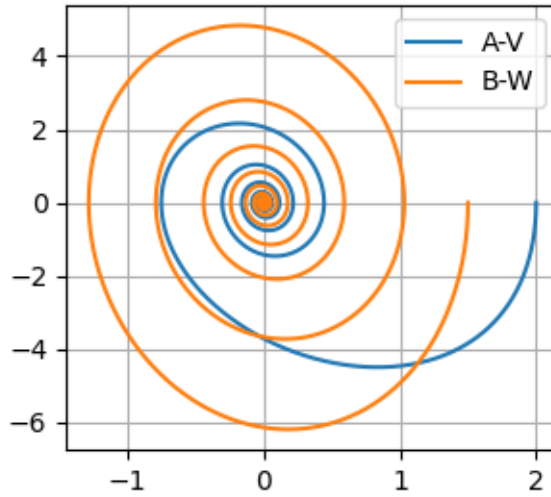


Рис. 2.4: Стійкий фокус. $\mu_x = 2, A_0 = 2, B_0 = 1.5$

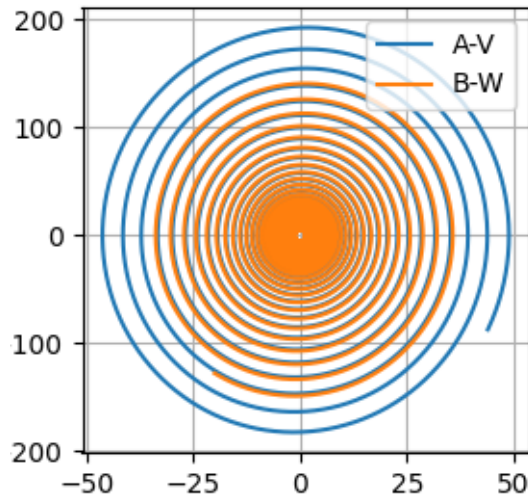


Рис. 2.5: Нестійкий фокус. $\mu_x = 0.6, A_0 = 2, B_0 = 1.5$

щоб отримати відповідні розв'язки, треба дослідити нелінійну систему (1.6) або (1.7).

Розділ 3. Модель з квадратичною нелінійністю

Роздивимось нелінійну систему, яка була описана у постановці задачі.

$$\begin{cases} \ddot{A} + \mu_x \dot{A} + \omega_x^2 A + k_x B + c_x A^2 = 0 \\ \ddot{B} + \mu_y \dot{B} + \omega_y^2 B - k_y A + c_y B^2 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Положення рівноваги визначається з умов $\dot{A} = \ddot{A} = \dot{B} = \ddot{B} = 0$.

Підставляючи ці умови у систему рівнянь (3.1), отримуємо:

$$\begin{cases} \omega_x^2 A + k_x B + c_x A^2 = 0 \\ \omega_y^2 B - k_y A + c_y B^2 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Очевидним положенням рівноваги є $A = 0, B = 0$, інші можливі положення рівноваги можна знайти чисельним методом. Нехай ця система матиме i дійсних розв'язків, тоді запишемо загальний спосіб аналізу стійкості цих положень рівноваги.

Позначемо положення рівноваги як A_i, B_i .

Для аналізу стійкості лінеаризованої системи складемо систему з чотирьох рівнянь, додавши рівняння \dot{A} і \dot{B} , які $\dot{A} = v_A$ і $\dot{B} = v_B$, де v_A і v_B

позначають похідні за часом. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \dot{A} = v_A \\ v_A = -\mu_x v_A - \omega_x^2 A - k_x B - c_x A^2 \\ \dot{B} = v_B \\ v_B = -\mu_y v_B - \omega_y^2 B + k_y A - c_y B^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Далі скористаємося методом Якобі. Матриця Якобі системи (3.3) матиме вигляд

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial v_A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial B} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial v_B} \\ \frac{\partial v_A}{\partial A} & \frac{\partial v_A}{\partial v_A} & \frac{\partial v_A}{\partial B} & \frac{\partial v_A}{\partial v_B} \\ \frac{\partial \dot{B}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{B}}{\partial v_A} & \frac{\partial \dot{B}}{\partial B} & \frac{\partial \dot{B}}{\partial v_B} \\ \frac{\partial v_B}{\partial A} & \frac{\partial v_B}{\partial v_A} & \frac{\partial v_B}{\partial B} & \frac{\partial v_B}{\partial v_B} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Продиференціювавши кожен елемент матриці (3.4) та підставивши особливі точки отримуємо:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_x^2 - 2c_x A_i & -\mu_x & -k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_y & 0 & -\omega_y^2 - 2c_y B_i & -\mu_y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_x^2 - 2c_x A_i & -\mu_x - \lambda & -k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda & 1 \\ k_y & 0 & -\omega_y^2 - 2c_y B_i & -\mu_y - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

Звідси ми отримуємо характеристичне рівняння

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (\mu_y + \mu_x)\lambda^3 + (\omega_y^2 + 2c_y B_i + 2c_x A_i + \mu_y \mu_x + \omega_x^2)\lambda^2 + \\ + (2c_y B_i \mu_x + \omega_y^2 \mu_x + 2c_x A_i \mu_y + \mu_y \omega_x^2)\lambda + \end{aligned}$$

$$+(\omega_y^2 \omega_x^2 + 4A_i B_i c_x c_y + 2A_i c_x \omega_y^2 + 2B_i c_y \omega_x^2 + k_x k_y) = 0$$

Для подальшого розв'язку потрібно знайти усі положення рівноваги з системи (3.2), як ми зазначали раніше, аналітично ми можемо знайти лише корінь $A = 0, B = 0$, для знаходження усіх інших можливих коренів потрібно використовувати чисельні розрахунки. Для цього зафіксуємо параметри системи

$$\mu_x = 1.1; \mu_y = 1.2; \omega_x = 4; \omega_y = 4.1; k_x = 4; k_y = 4.1; c_x = 3; c_y = 3.5$$

Підставляючи їх у (3.2), отримуємо

$$\begin{cases} 4^2 A + 4B + 3A^2 = 0 \\ 4.1^2 B - 4.1A + 3.5B^2 = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Положеннями рівноваги такої системи будуть: $A_0 = 0, B_0 = 0$ та $A_1 = 1.054, B_1 = -5.047$. Підставляючи параметри системи та положення рівноваги до характеристичного рівняння, ми зможемо чисельно отримати корені, які дадуть нам інформацію про стійкість положення рівноваги.

Так для положення рівноваги $A_0 = 0, B_0 = 0$ ми матимемо такі характеристичні корені

$$\lambda_1 = -1.075 - 4.042i$$

$$\lambda_2 = -1.075 + 4.042i$$

$$\lambda_3 = -0.075 - 4.038i$$

$$\lambda_4 = -0.075 + 4.038i$$

Оскільки у всіх коренів дійсна частина від'ємна, то положення рівноваги буде стійким та матиме тип фокус.

Для другого положення рівноваги $A_1 = 1.054, B_1 = -5.047$ матимемо такі характеристичні корені.

$$\lambda_1 = -4.898$$

$$\lambda_2 = 3.697$$

$$\lambda_3 = -0.549 - 4.649i$$

$$\lambda_4 = -0.549 + 4.649i$$

Оскільки є один додатній корінь, то положення рівноваги не буде стійким та матиме тип сідло. Побудуємо фазовий портрет для цього випадку. Змінюючи параметри, ми можемо визначити інші стани системи у різних

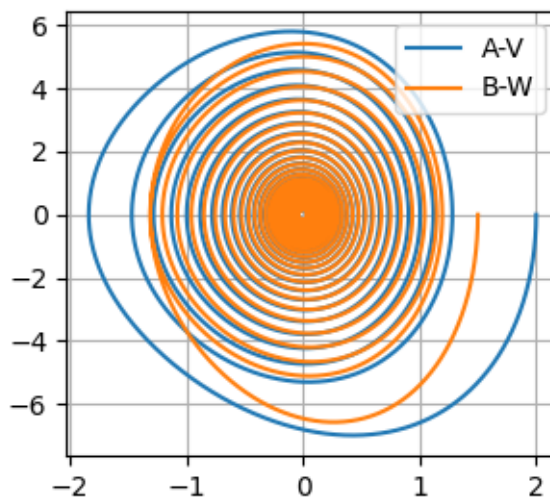


Рис. 3.1: Стійкий фокус. $A = 2, V = 0, B = 1.5, W = 0$.

випадках. Зафіксуємо усі параметри окрім k_x . Як тільки k_x перевищує значення 5.316, тоді положення рівноваги $A_0 = 0, B_0 = 0$ стає нестійким та з'являється стійкий граничний цикл. Друге положення рівноваги трішки змінює своє значення, але воно залишається нестійким та має схожі характеристичні корені як у минулому випадку. Фазовий портрет буде мати вигляд(Рис. 3.2).

Розглянемо поведінку системи при зміні інших параметрів. Зміна параметра μ у більшу сторону не змінить стійкість положення рівноваги, бо, як ми вже зазначали, цей параметр є коефіцієнтом затухання. Якщо почнемо зменшувати параметр, тоді в точці $\mu_x = 0.76$ виникає біфуркація

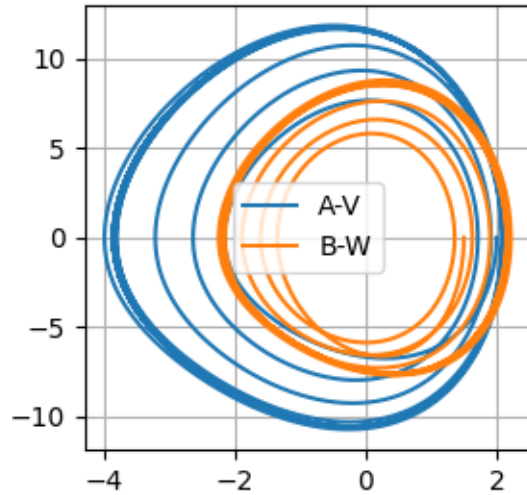


Рис. 3.2: Стійкий граничний цикл $A = 1, V = 0, B = 0.5, W = 0, k_x = 7$

і положення рівноваги $A = 0, B = 0$ стає нестійким та з'явиться граничний цикл (Рис. 3.3). Форма такого граничного циклу буде схожа на (Рис. 3.2), відрізнятиметься лише його розмір, це відбувається через те, що друге положення рівноваги не змінює свою стійкість та тип, тобто залишається седлом.

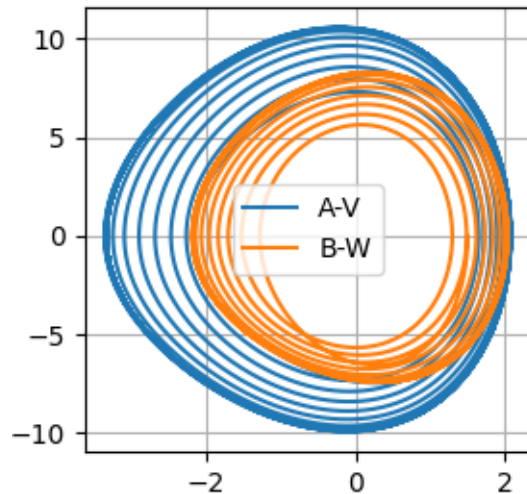


Рис. 3.3: Стійкий граничний цикл $A = 2, V = 0, B = 1.5, W = 0, \mu_x = 0.7$

Розділ 4. Модель з кубічною нелінійністю

Роздивимось нелінійну систему, яка була описана у постановці задачі.

$$\begin{cases} \ddot{A} + \mu_x \dot{A} + \omega_x^2 A + k_x B + c_x A^3 = 0 \\ \ddot{B} + \mu_y \dot{B} + \omega_y^2 B - k_y A + c_y B^3 = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Положення рівноваги визначається з умов $\dot{A} = \ddot{A} = \dot{B} = \ddot{B} = 0$.

Підставляючи ці умови у систему рівнянь (3.1), отримуємо:

$$\begin{cases} \omega_x^2 A + k_x B + c_x A^3 = 0 \\ \omega_y^2 B - k_y A + c_y B^3 = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Очевидним положенням рівноваги є $A = 0, B = 0$, інші можливі положення рівноваги можна знайти чисельним методом. Нехай ця система матиме i дійсних розв'язків, тоді запишемо загальний спосіб аналізу стійкості цих положень рівноваги.

Позначимо положення рівноваги як A_i, B_i .

Для аналізу стійкості лінеаризованої системи складемо систему з чотирьох рівнянь, додавши рівняння \dot{A} і \dot{B} , які $\dot{A} = v_A$ і $\dot{B} = v_B$, де v_A і v_B

позначають похідні за часом. Отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \dot{A} = v_A \\ \dot{v}_A = -\mu_x v_A - \omega_x^2 A - k_x B - c_x A^3 \\ \dot{B} = v_B \\ \dot{v}_B = -\mu_y v_B - \omega_y^2 B + k_y A - c_y B^3 \end{cases} \quad (4.3)$$

Далі скористаємося методом Якобі. Матриця Якобі системи (4.3) матиме вигляд

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial v_A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial B} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial v_B} \\ \frac{\partial \dot{v}_A}{\partial A} & \frac{\partial \dot{v}_A}{\partial v_A} & \frac{\partial \dot{v}_A}{\partial B} & \frac{\partial \dot{v}_A}{\partial v_B} \\ \frac{\partial \dot{B}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{B}}{\partial v_A} & \frac{\partial \dot{B}}{\partial B} & \frac{\partial \dot{B}}{\partial v_B} \\ \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial A} & \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial v_B} & \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial B} & \frac{\partial \dot{v}_B}{\partial v_B} \\ \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial v_A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial B} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial v_B} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Продиференціювавши кожен елемент матриці (4.4) та підставивши особливі точки, отримуємо:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_x^2 - 3c_x A_i^2 & -\mu_x & -k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_y & 0 & -\omega_y^2 - 3c_y B_i^2 & -\mu_y \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_x^2 - 3c_x A_i^2 & -\mu_x - \lambda & -k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda & 1 \\ k_y & 0 & -\omega_y^2 - 3c_y B_i^2 & -\mu_y - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

Звідси ми отримуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^4 + (\mu_y + \mu_x)\lambda^3 + (\omega_y^2 + 3c_y B_i^2 + 3c_x A_i^2 + \mu_y \mu_x + \omega_x^2)\lambda^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +(3c_y B_i^2 \mu_x + \omega_y^2 \mu_x + 3c_x A_i^2 \mu_y + \mu_y \omega_x^2) \lambda + \\
& + (\omega_y^2 \omega_x^2 + 9A_i^2 B_i^2 c_x c_y + 3A_i^2 c_x \omega_y^2 + 3B_i^2 c_y \omega_x^2 + k_x k_y) = 0
\end{aligned}$$

Для подальшого розв'язку потрібно знайти усі положення рівноваги з системи (4.2), як ми зазначали раніше, аналітично ми можемо знайти лише корінь $A = 0, B = 0$, для знаходження усіх інших можливих коренів потрібно використовувати чисельні розрахунки. Для цього зафіксуємо параметри системи

$$\mu_x = 1.1; \mu_y = 1.2; \omega_x = 4; \omega_y = 4.1; k_x = 4; k_y = 4.1; c_x = 3; c_y = 3.5 \quad (4.7)$$

Підставляючи їх у (3.2), отримуємо

$$\begin{cases} 4^2 A + 4B + 3A^3 = 0 \\ 4.1^2 B - 4.1A + 3.5B^3 = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Положеннями рівноваги такої системи буде лише $A_0 = 0, B_0 = 0$. Підставляючи ці параметри система та положення рівноваги до характеристичного рівняння ми зможемо чисельно отримати корені, які дадуть нам інформацію про стійкість положення рівноваги.

Так для положення рівноваги $A_0 = 0, B_0 = 0$ ми матимемо такі характеристичні корені

$$\lambda_1 = -1.075 - 4.042i$$

$$\lambda_2 = -1.075 + 4.042i$$

$$\lambda_3 = -0.075 - 4.038i$$

$$\lambda_4 = -0.075 + 4.038i$$

Оскільки у всіх коренів дійсна частина від'ємна, то положення рівноваги буде стійким та матиме тип фокус. Побудуємо фазовий портрет для цього випадку.

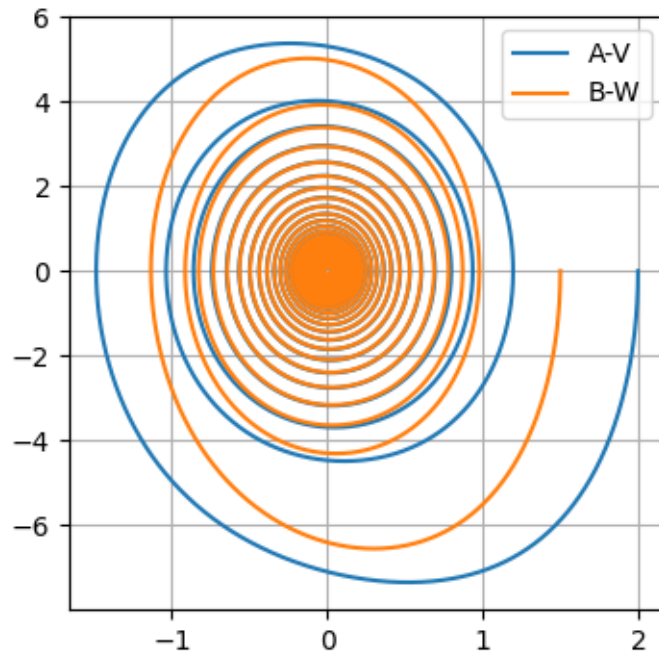


Рис. 4.1: Стійкий фокус. $A = 2, V = 0, B = 1.5, W = 0$.

Змінюючи параметри системи, ми можемо визначити інші стани системи у різних випадках. Зафіксуємо усі параметри окрім k_x та почнемо збільшувати, бо зменшення k_x та k_y ще більше стабілізує систему, Як тільки k_x перевищує значення 5.316, тоді положення рівноваги $A_0 = 0, B_0 = 0$ стає нестійким та з'являється стійкий граничний цикл. Друге положення рівноваги трішки змінює своє значення, але воно залишається нестійким та має схожі характеристичні корені як у минулому випадку. Фазовий портрет буде мати вигляд(Рис. 4.2).

Отже ми можемо бачити, що при збільшенні k_x від 5.316 з'являється два стійкі граничні цикли для кожної з проекцій. Щоб точно впевнитись, що ми маємо стійкий граничний цикл зобразимо інші проекції (Рис. 4.3).

Таким чином були розглянуті зміни в поведінці системи при збільшенні значення параметра k_x . Зміна аналогічного параметра k_y дасть досить схожу картину. Але система залежить ще від декількох параметрів, які так

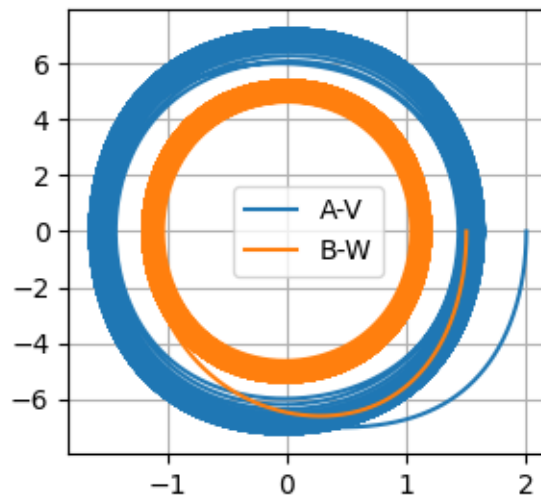


Рис. 4.2: Стійкий граничний цикл. $A = 2, V = 0, B = 1.5, W = 0, k_x = 7$

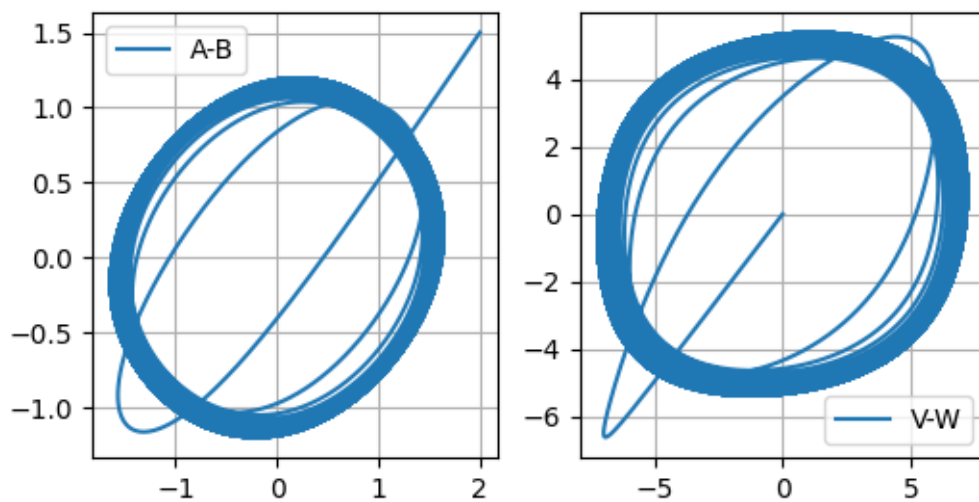


Рис. 4.3: Стійкі граничні цикли $A = 2, V = 0, B = 1.5, W = 0, k_x = 7$

само можуть змінювати поведінку системи.

Почнемо змінювати параметр μ_x , при цьому усі інші параметри зафіксуємо на значеннях (4.7).

Параметр μ відповідає за згасання коливань в системі, тому збільшення параметра μ призведе лише до збільшення швидкості згасання коливань. Тому зміна поведінки системи можлива лише при зменшенні одного з μ . Так при зменшенні μ_x до 0.75 положення рівноваги перестає бути стійким

та з'являються стійкі граничні цикли. Як ми можемо бачити на фазовому портреті (Рис. 4.4), наша система дійсно має два стійкі граничні цикли, по одному у кожній з проекцій. Для впевненості у тому, що ми отримали стійкі граничні цикли, виведемо інші проекції (Рис. 4.5). Однак система досить різко веде себе у самому початку, через що наша фазова траєкторія (B-W) заходить спочатку до центра кола, після чого починає наближатись до стійкого граничного циклу.

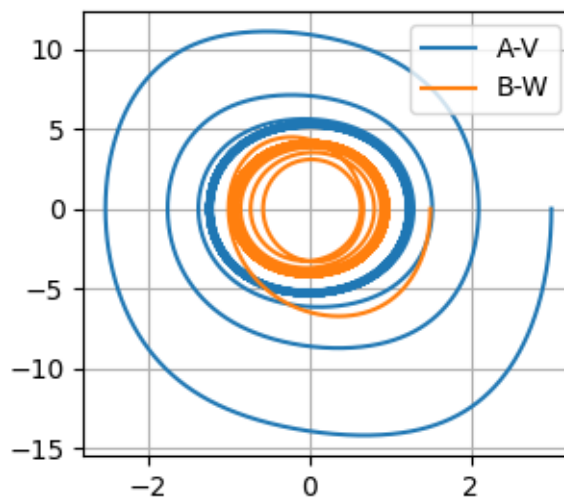


Рис. 4.4: Стійкий граничний цикл $A = 3, V = 0, B = 1.5, W = 0, \mu_x = 0.7$

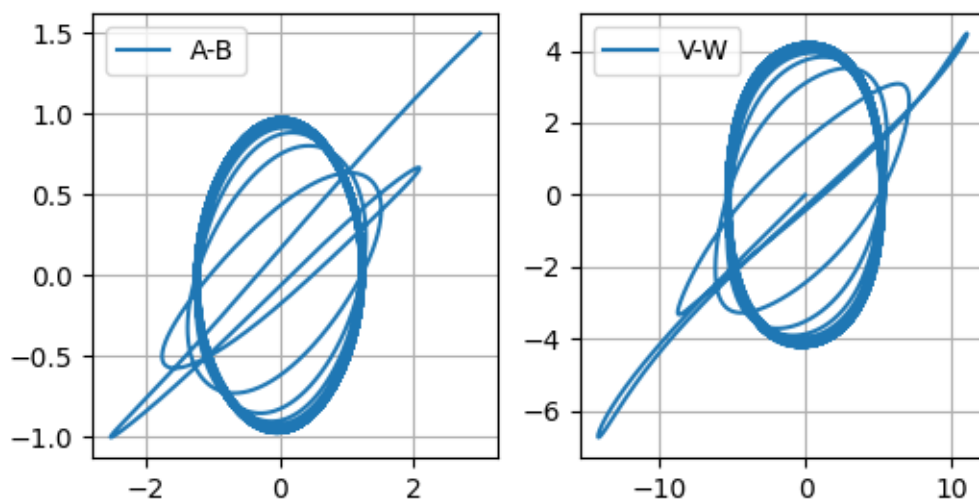


Рис. 4.5: Стійкі граничні цикли $A = 3, V = 0, B = 1.5, W = 0, \mu_x = 0.7$

Висновки

У результаті досліджень моделей коливальної системи з квадратичною та кубічною нелійністю було виявлено, що поведінка системи змінюється залежно від параметрів. В обох випадках стійкість положення рівноваги у точці $(0, 0)$ змінювалась від стійкого до нестійкого та назад. Якщо положення рівноваги втрачало свою стійкість, траєкторії починали прямувати до стійкого граничного циклу. Інших біфуркацій у обох моделях помічено не було. Залежно від того, який параметр ми обирали для зміни та наскільки сильно його змінювали, швидкість наближення траєкторій до стійкого граничного циклу могла прискорюватись або сповільнюватись. Також, залежно від цього, розмір граничного циклу міг змінюватись, але його форма залишалася однаковою. При стійкому положенні рівноваги так само спостерігалась зміна швидкості руху вздовж траєкторій, чим ближче параметр знаходився до точки біфуркації, не досягаючи її, тим повільніше траєкторія наближалася до нуля.

Лістинги

У цьому розділі наведені програми мовою Python, які були написані для чисельних розрахунків.

Перший лістинг.

Лістинг 4.1: Чисельний метод розв'язання рівнянь

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
mu_x = 1.1
mu_y = 1.2
w_x = 4
w_y = 4.1
k_x = 4
k_y = 4.1
print(f'mu_x={mu_x}', f'mu_y={mu_y}', f'w_x={w_x}', f'w_y={w_y}'
      , f'k_x={k_x}', f'k_y={k_y}')
print(f'a={1}', f'b={mu_x+mu_y}', f'c={w_x**2+mu_x*mu_y+mu_y**2}'
      , f'd={mu_x*w_y**2+mu_y*w_x**2}', f'e={w_x**2*w_y**2+k_x*
      k_y}')
a=1
b=mu_x+mu_y
c=w_x**2+mu_x*mu_y+mu_y**2
d=mu_x*w_y**2 + mu_y*w_x**2
e = w_x**2*w_y**2+k_x*k_y
equation = f'{a}*x**4+{b}*x**3+{c}*x**2+{d}*x+{e}'
degree = 4
solution = solve(equation, x)
```

```

real_solutions = []
complex_solutions = []
for s in solution:
    if isinstance(s, complex):
        complex_solutions.append(s)
    else:
        real_solutions.append(s)

if len(real_solutions) > 0:
    print(f"equation_roots_{equation}:[{s.evalf() for s in
    real_solutions}]")
if len(complex_solutions) > 0:
    print(f"equation_roots_{equation}:[{s.evalf() for s in
    complex_solutions}]")

```

Тепер другий лістинг.

Лістинг 4.2: Побудова фазового портрету

```

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

def system(state, t, mu_x, mu_y, omega_x, omega_y, k_x, k_y, c_x,
c_y):
    A, V, B, W = state
    dAdt = V
    dVdt = -mu_x*V - omega_x**2*A + k_x*B - c_x*A**2
    dBdt = W
    dWdt = -mu_y*W - omega_y**2*B - k_y*A - c_y*B**2
    return dAdt, dVdt, dBdt, dWdt

A0, V0, B0, W0 = 2, 0, 1.5, 0
mu_x, mu_y = 0.7, 1.2

```

```

omega_x, omega_y = 4, 4.1
k_x, k_y = 4, 4.1
c_x, c_y = 3, 3.5
params = (mu_x, mu_y, omega_x, omega_y, k_x, k_y, c_x, c_y)
#8.7
t = np.linspace(0, 50, 500000)

solution = odeint(system, (A0, V0, B0, W0), t, args=params)
solution_2 = odeint(system, (5, 0, -2, 0), t, args=params)

fig, (ax2, ax3) = plt.subplots(
    nrows=1, ncols=2,
    figsize=(6, 3)
)

ax2.plot(solution[:, 0], solution[:, 2], label='A-B')
ax2.legend(loc='best')
ax2.grid()
ax3.plot(solution[:, 1], solution[:, 3], label='V-W')
ax3.legend(loc='best')
ax3.grid()
plt.show()

ax1=plt.figure(figsize=(3, 3))
plt.plot(solution[:, 0], solution[:, 1], label='A-V')
plt.plot(solution[:, 2], solution[:, 3], label='B-W')
plt.legend(loc='best')
plt.grid()
plt.show()

```

I, нарешті, третій.

Лістинг 4.3: Чисельний розв'язок системи рівнянь

```

from scipy.optimize import fsolve
omega_x = 4
k_x = 4

```

```
c_x = 3
```

```
omega_y = 4.1
```

```
k_y = 4.1
```

```
c_y = 3.5
```

```
def equations(vars):
```

```
    A, B = vars
```

```
    eq1 = omega_x**2 * A + k_x * B + c_x * A**2
```

```
    eq2 = omega_y**2 * B - k_y * A + c_y * B**2
```

```
    return [eq1, eq2]
```

```
guesses = [(100.0, 100.0), (100.0, -100.0)]
```

```
for guess in guesses:
```

```
    A_sol, B_sol = fsolve(equations, guess)
```

```
    print("Answer", guess, ":")
```

```
    print("A_=", A_sol)
```

```
    print("B_=", B_sol)
```

```
    print()
```

Список використаних джерел

- [1] Брюсселятор, URL:<https://en.wikipedia.org/wiki/Brusselator>
- [2] І.Д. Борисов, С.О. Пославський, Ю.І. Руднєв, Експериментальне дослідження хвильових процесів у двошаровій системі токонесучих рідин, що не змішуються, Прикладна гідромеханіка, 2010, Том12, №1, С. 3-10.
- [3] І.Д. Борисов, С.О. Пославський, Ю.І. Руднєв, Хвильові процеси в двошаровій системі токонесучих рідин що не змішуються, Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Сер. Математика, прикладна математика, механіка. 2008. №826. С. 165-184.
- [4] Sneyd A. D., Wang A. Interfacial instability due to MHD mode coupling in aluminium reduction cells, J.Fluid Mech, 1994, 263, P. 243–259.
- [5] Urata N., Mori S., Ikeuchi H. Behaviour of bath and molten metal in aluminium electrolytic cell, Keikinzoku, 1976, 26, № 11, P. 573–600.
- [6] Sele T., Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells, Metallurgical transactions, 1977, 8B, P, 613–618.
- [7] A. Jenkins, Self-oscillation, Physics Reports, Volume 525, Issue 2, 2013, P. 167-222